PENDULE PESANT

Réf. 002 041

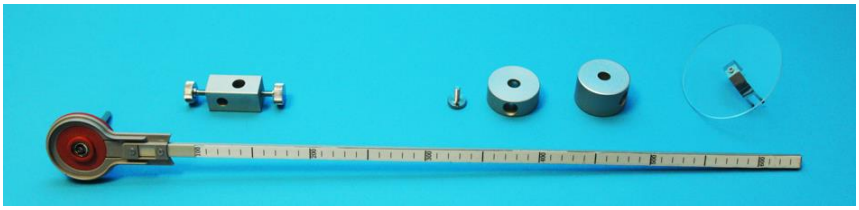
1. Objet :

Le dispositif permet d'étudier la période des oscillations pendule pesant à masse constante en fonction de la position de son centre de masse par rapport à l'axe des oscillations.
Pour cela, à un axe à roulement à bille haute qualité est fixée une tige parallélépipédique homogène graduée oscillante sur laquelle peut coulisser une masse cylindrique qui se verrouille à l'aide d'une vis.

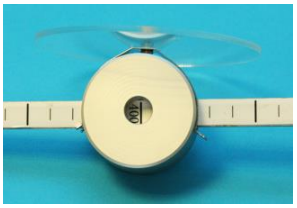
2. Composition :

a. Caractéristiques techniques :

- Axe à roulement à bille (à fixer sur un statif lesté avec une noix de serrage (à commander séparément),
- Balancier gradué,
- Deux masses cylindriques coulissantes,
- Disque d'amortissement se fixant sur les masses



Présentation de l'ensemble du dispositif



Détail

b. Caractéristiques physiques :

Poulie :
m = 22 g ; ∅ = 63 mm
Tige :
mT = 132 g ; l = 640 mm
Masses cylindriques :
1ère masse : mC1 = 90 g ; ∅ =50 mm
2ème masse : mC2 = 140 g ; ∅ =50 mm
Vis :
mV = 11 g

3. Etude dynamique du pendule pesant :

a. Remarque préalable :

On peut montrer que le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe □' est de l'ordre de 10-5 et que le moment d'inertie de la tige seule par rapport à ce même axe □' est de l'ordre de 10-2. On peut donc ne pas tenir compte de la poulie dans l'étude qui suit.

b. Equation différentielle :

En l'absence de frottement et autre résistance passive, la loi de conservation de l'énergie s'écrit :

$E_m = E_c + E_p = \text{cste}$

On prend le plan horizontal passant par l'axe □' comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur.

Soit :

$$E_m = \left[\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2\right] + \left[m_T g\left(-\frac{l}{2}\cos\alpha\right) + m_C g(-x\cos\alpha)\right] = \text{cste}$$

$$\Leftrightarrow E_m = \frac{1}{2}\sum m_i (r_i \alpha')^2 - \left(m_T \frac{l}{2} + m_C x\right) g\cos\alpha = \text{cste}$$

$$\Leftrightarrow E_m = \frac{1}{2}\alpha'^2 \sum m_i r_i^2 - \left(m_T \frac{l}{2} + m_C x\right) g\cos\alpha = \text{cste}$$

En posant $J_{\Delta'} = \sum m_i r_i^2$, appelé moment d'inertie, on obtient :

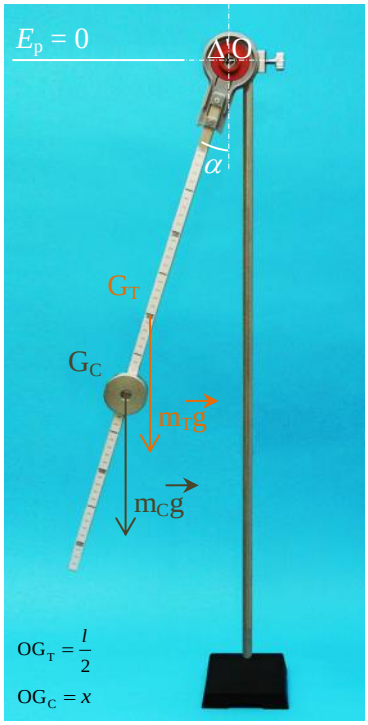
$$E_m = \frac{1}{2} J_{\Delta'} \alpha'^2 - \left(m_T \frac{l}{2} + m_C x\right) g\cos\alpha = \text{cste}$$

En dérivant par rapport à t, on a :

$$J_{\Delta'} \alpha' \alpha'' + \left(m_T \frac{l}{2} + m_C x\right) g\alpha' \sin\alpha = 0$$

Avec □' non constamment nul, d'où l'équation différentielle :

$$\alpha'' + \frac{\left(m_T \frac{l}{2} + m_C x\right)}{J_{\Delta'}} g \sin\alpha = 0$$



En considérant des correspondances numériques suivantes :

-Si α = 7°, α =0,1222 rad ; sin (α) = 0,1219 $\Rightarrow \alpha$ (en rad) = sin (α) à 10-3 près

-Si α = 10°, α =0,175 rad ; sin (α) = 0,174 $\Rightarrow \alpha$ (en rad) = sin (α) à 10-2 près

On peut admettre que pour des amplitudes angulaires faibles, sin(α) = α (en rad).

L'équation différentielle du second ordre devient :

$$\alpha'' + \frac{\left(m_T \frac{l}{2} + m_C x\right)}{J_{\Delta'}} g\alpha = 0$$

Il en résulte que la période des oscillations du pendule composé a pour expression :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta'}}{g\left(m_T \frac{l}{2} + m_C x\right)}} = 0$$

c. Rappels des moments d'inertie :

- Moment d'inertie d'une barre homogène de section négligeable de masse m et de longueur l par rapport à un axe □ passant par son centre de masse : $J_\Delta = \frac{ml^2}{12}$
- Moment d'inertie d'un cylindre homogène de masse m et de rayon R par rapport à un axe □ orthogonal à l'une de ses faces passant par le centre de masse : $J_\Delta = \frac{mR^2}{2}$
- Théorème de Huygens : Soit un axe Δ' parallèle à l'axe Δ passant par le centre de masse de l'objet, et distant de d de Δ. Le moment d'inertie $J_{\Delta'}$ par rapport à J_Δ a pour expression : $J_{\Delta'} = J_\Delta + md^2$

d. Période des oscillations :

Dans le cas du pendule pesant composé d'une tige de masse mT de longueur l oscillant autour d'un axe de rotation □' passant par l'une de ses extrémités et d'un cylindre* de masse mC, de rayon R fixé à la tige à la distance x de cet axe de rotation, le moment d'inertie a pour expression :

$$J_{\Delta'} = \left[\frac{m_T l^2}{12} + m_T\left(\frac{l}{2}\right)^2\right] + \left[\frac{m_C R^2}{2} + m_C x^2\right] \text{ soit } \boxed{J_{\Delta'} = \frac{m_T l^2}{3} + m_C\left(\frac{R^2}{2} + x^2\right)}$$

* Le trou ayant rayon très inférieur au rayon du cylindre et étant compensé par la vis de serrage, on considère que le moment d'inertie de l'ensemble {cylindre creux et vis} est pratiquement égal à celui d'un cylindre plein de masse $m_C = m_{cylindre\ creux} + m_{vis}$.

L'expression de la période du pendule composée est donc :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{m_T l^2}{3} + m_C\left(\frac{R^2}{2} + x^2\right)}{g\left(m_T \frac{l}{2} + m_C x\right)}} = 0$$

4. Etude expérimentale sans amortissement :

L'étude du pendule pesant peut se faire soit à l'aide d'un chronomètre soit par vidéo et d'un logiciel de traitement d'images vidéo.

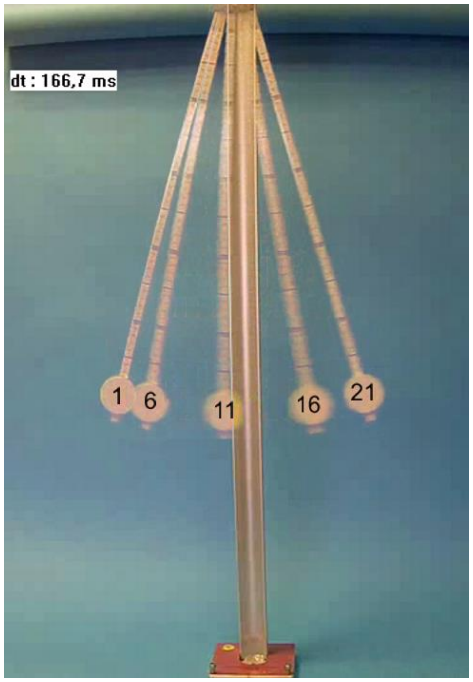
a. Tige seule :

Pour la tige seule (sans masse cylindrique), on a $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\frac{m_T l^2}{3}}{g m_T \frac{l}{2}}} = 0 \Leftrightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2l}{3g}}$

On vérifie que la période des oscillations est $\boxed{T = 1{,}31\,\text{s}}$

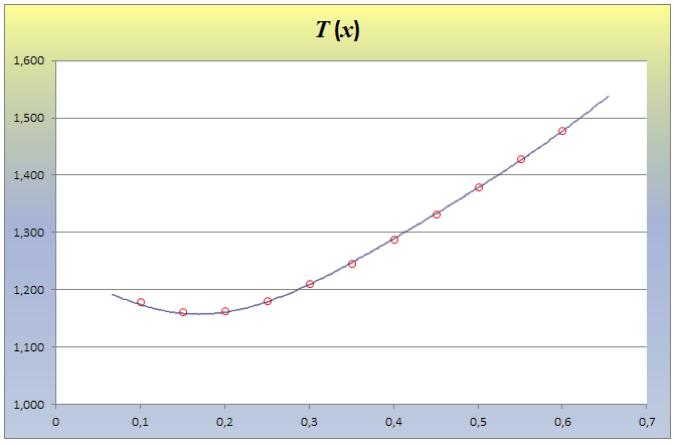
b. Pendule composé :

Ci-contre la chronophotographie du mouvement du pendule pesant (1 image sur 5) sur une demi-période environ illustre l'étude vidéo du mouvement.



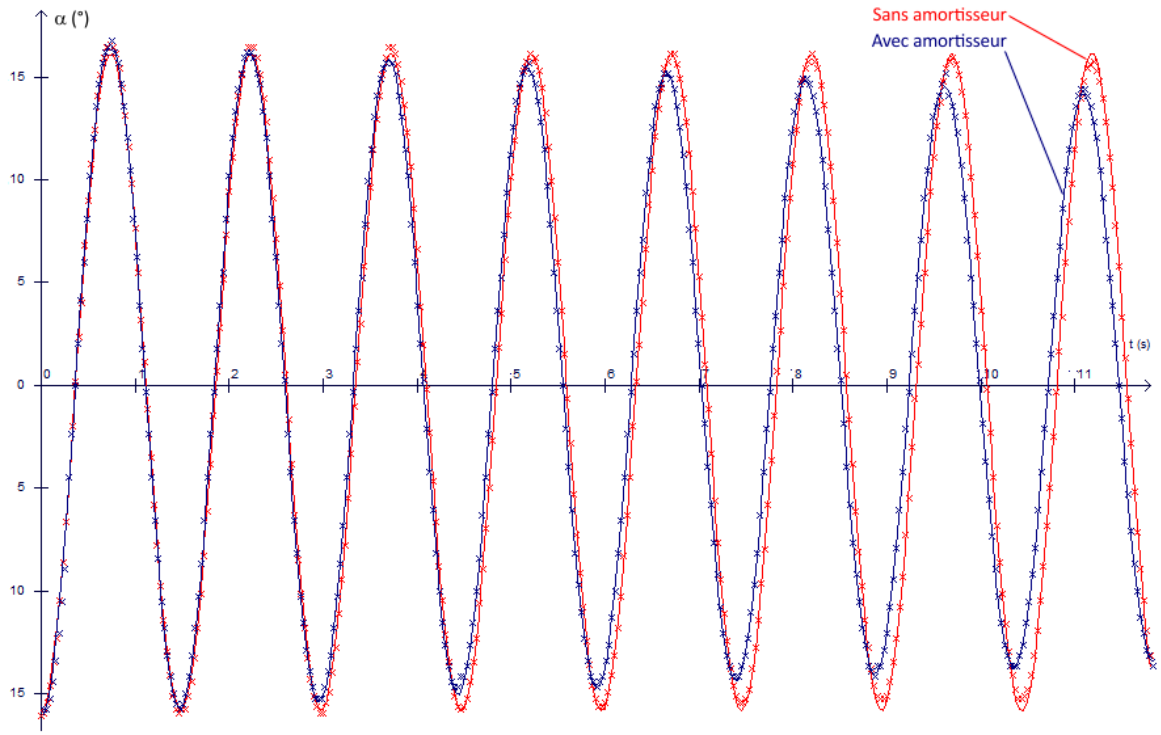
On fixe une masse cylindrique sur la tige à 10 cm de l'axe de rotation, on détermine la période des oscillations (méthode vidéo ou chronomètre) puis recommence après avoir éloigné la masse de 5 cm.

On trace alors la courbe T(x) qu'on peut comparer à la courbe théorique :



5. Etude expérimentale avec amortissement :

On fixe le disque d'amortissement sur la masse cylindrique et on fait osciller le pendule. On peut alors comparer les courbes obtenues sans et avec amortisseur (masse cylindrique fixée au même endroit sur la tige) :



En plus de l'amortissement, on peut alors constater que la pseudo-période T est inférieure à la période propre T0 du pendule pesant

6. Nous contacter:

Ce matériel est garanti 2ans Pour toutes questions, veuillez contacter :

sav@sciencethic.com

www.sciencethic.com