Chute dans un fluide Réf. 002 046-002 047-002 048

I – Objet

1. Présentation

Le dispositif de chute dans un fluide permet d'aborder les notions d'accélération et de vitesses limites.
Chaque tube est constitué d'un fluide transparent visqueux et d'une bille, la hauteur de chute est parfaitement adaptée à l'étude par vidéo.
Les trois tubes (même fluide et billes de masses différentes) sont conçus de façon à pouvoir mettre en évidence que la force de frottement qui est fonction de la vitesse de la bille, varie :
- soit proportionnellement à la vitesse (cas de vitesses faibles)
- soit proportionnellement au carré de la vitesse (cas de vitesses plus grandes)

2. Caractéristiques techniques

Tubes en matière plastique transparente
Dimensions l∅ x h) : 50x500 mm

3. Caractéristiques physiques

Masse volumique du fluide : ρ_F = 860 kg.m^{-3}.
Diamètre des billes A, B et C : ∅ = 25 mm.

Masse volumique des billes :

- bille A : $\rho_{bA} = 2580$ kg.m^{-3}.
- bille B : $\rho_{bB} = 4340$ kg.m^{-3}.
- bille C : $\rho_{bC} = 8060$ kg.m^{-3}.

II - Etude dynamique

1. Equation différentielle du mouvement

Système considérée : La bille de masse m.
Référentiel : le tube immobile par rapport la terre, considéré comme référentiel galiléen.
Bilan des forces extérieures au système :

Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$

La poussée d'Archimède $\vec{A} = -V\rho_F \vec{g}$ ou V est le volume de la bille et ρ_F est la masse volumique du fluide

La force de frottement $\vec{f}$ qui s'oppose au mouvement.

L'intensité f de cette force $\vec{f}$ peut être :

- soit proportionnelle à la valeur v de la vitesse $\vec{v}$: $\vec{f} = -k\vec{v} = -kv\dfrac{\vec{g}}{g}$, avec $g = \|\vec{g}\|$
- soit proportionnelle au carré de la vitesse v^2 : $\vec{f} = -kv^2\dfrac{\vec{g}}{g}$

En appliquant la deuxième loi de Newton $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, on obtient : $\vec{P} + \vec{A} + \vec{f} = m\vec{a}$.

Dans le premier cas, on obtient : $m\vec{g} - V\rho_F\vec{g} - kv\dfrac{\vec{g}}{g} = m\vec{a}$ soit $\dfrac{mg - V\rho_F g - kv}{g}\vec{g} = m\vec{a}$

En projetant sur un axe vertical orienté dans le sens de $\vec{g}$, on obtient :

$mg - V\rho_F g - kv = ma$ ou $mg - V\rho_F g - ky' = my''$

D'où l'équation différentielle de 2ème ordre : $y'' = -\dfrac{k}{m}y' + g - \dfrac{V\rho_F}{m}g$, soit :

Pour le premier cas : $y'' = -\dfrac{k}{m}y' + g\left(1 - \dfrac{\rho_F}{\rho_B}\right)$ (ρ_B est la masse volumique de la bille).

Pour le deuxième cas, on obtient : $y'' = -\dfrac{k}{m}y'^2 + g\left(1 - \dfrac{\rho_F}{\rho_B}\right)$ (démonstration analogue).

2. Vitesse limite

La vitesse limite est atteinte quand l'accélération du mouvement est nulle.

Dans le premier cas on trouve : $v_L = \dfrac{mg}{k}\left(1 - \dfrac{\rho_F}{\rho_B}\right)$

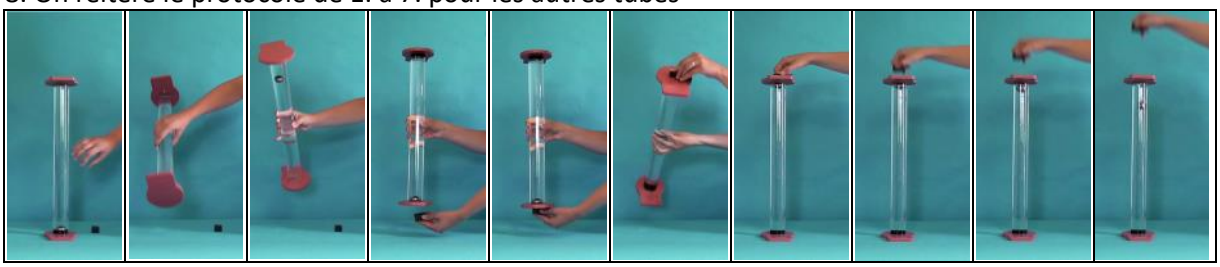
Dans le deuxième cas on trouve : $v_L = \sqrt{\dfrac{mg}{k}\left(1 - \dfrac{\rho_F}{\rho_B}\right)}$

Sciencéthic

III - Etude expérimentale du mouvement d'une bille dans un fluide

1. Protocole expérimental

1. On retourne le tube,
2. On positionne 2 petits aimants en ferrite sous le tube pour attirer la bille
3. On retourne le tube en maintenant l'aimant et en s'assurant que la bille reste attirée.
4. On pose le tube sur une table horizontale
5. On positionne une caméra, webcam ou caméra rapide devant le tube. On filme
6. On lève l'aimant rapidement bien à la verticale
7. Dès que la bille touche le fond du tube, on stoppe l'acquisition vidéo.
8. On réitère le protocole de 1. à 7. pour les autres tubes



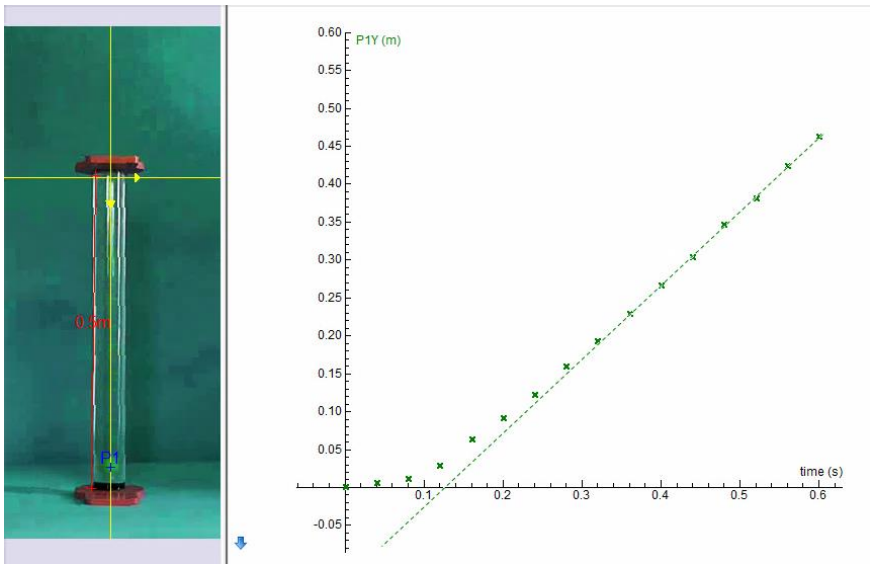
2. Exploitation de la vidéo

Deux possibilités sont envisagées :

a. Pour chaque vidéo obtenue, on réalise la chronophotographie correspondante, à l'aide d'un logiciel approprié. On mesure alors les ordonnées successives :

y_{exp} (m)
0,001
0,014
0,033
0,057
0,089
0,120
0,157
0,188
0,226
0,259
0,300
0,335
0,375
0,412
0,455

b. A l'aide d'un logiciel de traitement d'images, on acquiert les ordonnées successives de la bille :



Après mesure, on trace les courbes y(t). On observe que ces courbes sont asymptotiques. On trace alors la tangente respective à chaque courbe y(t) dans leur partie affine. On détermine le coefficient directeur de chaque tangente qui est la vitesse limite v_L de la bille.

3. Etude par la méthode d'Euler

Elle consiste à considérer qu'à l'instant $t_n = t_{n-1} + \Delta t$, pour un $\Delta t \approx 0$, $v_n \approx v_{n-1} + a_{n-1}\Delta t$.

On en déduit alors $y_n \approx y_{n-1} + v_{n-1}\Delta t$.

De l'étude dynamique précédente, on a montré (dans le cas où la force de frottement est en kv) que $y'' = -\frac{k}{m}y' + g\left(1 - \frac{\rho_F}{\rho_B}\right)$ et $v_L = \frac{mg}{k}\left(1 - \frac{\rho_F}{\rho_B}\right)$;

De ces deux relations, on en déduit : $y'' = g\left(1 - \frac{\rho_F}{\rho_B}\right)\left(1 - \frac{v}{v_L}\right)$

Ainsi on peut dresser le tableau suivant dans un tableur :

n	t	a	v	y
0	0	$a_0 = g\left(1 - \frac{\rho_F}{\rho_B}\right)\left(1 - \frac{v_0}{v_L}\right)$	$v_0 = 0$	0
1	0+Δt	$a_1 = g\left(1 - \frac{\rho_F}{\rho_B}\right)\left(1 - \frac{v_1}{v_L}\right)$	$v_1 \approx v_0 + a_0\Delta t$	$y_1 \approx y_0 + v_0\Delta t$
2	0+2Δt	$a_2 = g\left(1 - \frac{\rho_F}{\rho_B}\right)\left(1 - \frac{v_2}{v_L}\right)$	$v_2 \approx v_1 + a_1\Delta t$	$y_2 \approx y_1 + v_1\Delta t$
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

Ce qui se traduit (sous Excel) par :

Sciencéthic

	A	B	C	D	E
1	**Bille A**				
2	ρ_f =	0,86	(g/cm3)	Conditions initiales : $y_0 = 0$; $v_0 = 0$	
3	ρ_b =	2,58	(g/cm3)	$a_n = \left(1 - \frac{\rho_F}{\rho_B}\right)\left(1 - \frac{v_n}{v_{Lim}}\right)g$	
4				$v_n = v_{n-1} + a_{n-1}\Delta t$	
5	La vitesse limite est déterminée expérimentalement :			$y_n = y_{n-1} + v_{n-1}\Delta t$	
6	v_{Lim} =	0,61	m/s		
7	Δt =	0,04	s		
8					

9	n	t (s)	a (m/s²)	v (m/s)	y_{Euler} (m)
10	0	0	=9,81*(1-$B$2/$B$3)*(1-D10/$B$6)	0	0
11	1	=B10+$B$7	=9,81*(1-$B$2/$B$3)*(1-D11/$B$6)	=D10+C10*$B$7	=E10+D10*$B$7
12	2	=B11+$B$7	=9,81*(1-$B$2/$B$3)*(1-D12/$B$6)	=D11+C11*$B$7	=E11+D11*$B$7
13	3	↓ etc. ↓	↓ etc. ↓	↓ etc. ↓	↓ etc. ↓

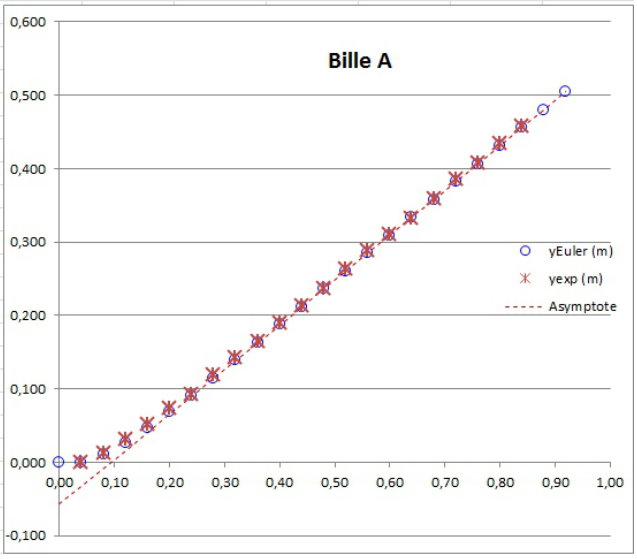
Dans le cas où la force de frottement est en kv^2, on obtient : $y'' = g\left(1-\frac{\rho_F}{\rho_B}\right)\left(1-\frac{v^2}{v_L^2}\right)$

4. Quelques résultats en guise d'exemple

Bille A (force de frottement en kv)

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Bille A**						
2	ρ_f =	0,86	(g/cm3)		Conditions initiales : $y_0 = 0$; $v_0 = 0$		
3	ρ_b =	2,58	(g/cm3)		$a_n = \left(1-\frac{\rho_F}{\rho_B}\right)\left(1-\frac{v_n}{v_{Lim}}\right)g$		
4					$v_n = v_{n-1} + a_{n-1}\Delta t$		
5	La vitesse limite est déterminée expérimentalement :				$y_n = y_{n-1} + v_{n-1}\Delta t$		
6	v_{Lim} =	0,61	m/s				
7	Δt =	0,04	s				
8							

9	n	t (s)	a (m/s²)	v (m/s)	y_{Euler} (m)	y_{exp} (m)	Asymptote
10	0	0,00	6,540	0,000	0,000		-0,057
11	1	0,04	3,735	0,262	0,000	0,000	-0,033
12	2	0,08	2,133	0,411	0,010	0,013	-0,008
13	3	0,12	1,218	0,496	0,027	0,032	0,016
14	4	0,16	0,696	0,545	0,047	0,052	0,041
15	5	0,20	0,397	0,573	0,069	0,074	0,065
16	6	0,24	0,227	0,589	0,091	0,093	0,090
17	7	0,28	0,130	0,598	0,115	0,119	0,114
18	8	0,32	0,074	0,603	0,139	0,142	0,138
19	9	0,36	0,042	0,606	0,163	0,165	0,163
20	10	0,40	0,024	0,608	0,187	0,190	0,187
21	11	0,44	0,014	0,609	0,212	0,213	0,212
22	12	0,48	0,008	0,609	0,236	0,237	0,236
23	13	0,52	0,005	0,610	0,260	0,263	0,260
24	14	0,56	0,003	0,610	0,285	0,288	0,285
25	15	0,60	0,001	0,610	0,309	0,311	0,309
26	16	0,64	0,001	0,610	0,334	0,333	0,334
27	17	0,68	0,000	0,610	0,358	0,359	0,358
28	18	0,72	0,000	0,610	0,382	0,385	0,382
29	19	0,76	0,000	0,610	0,407	0,407	0,407
30	20	0,80	0,000	0,610	0,431	0,435	0,431
31	21	0,84	0,000	0,610	0,456	0,458	0,456
32	22	0,88	0,000	0,610	0,480		0,480
33	23	0,92	0,000	0,610	0,504		0,504



Bille B (force de frottement en kv)

Sciencéthic

Bille B

ρ_f = 0,86 (g/cm3)

ρ_b = 4,34 (g/cm3)

La vitesse limite est déterminée

v_{Lim} = 0,94 m/s

Δt = 0,04 s

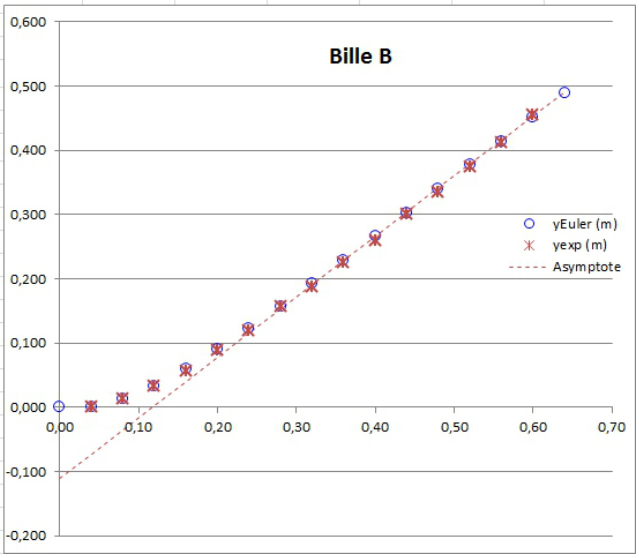
Conditions initiales : $y_0 = 0$; $v_0 = 0$

$$a_n = \left(1 - \frac{\rho_F}{\rho_B}\right)\left(1 - \frac{v_n}{v_{Lim}}\right)g$$

$$v_n = v_{n-1} + a_{n-1}\Delta t$$

$$y_n = y_{n-1} + v_{n-1}\Delta t$$

n	t (s)	a (m/s²)	v (m/s)	y_{Euler} (m)	y_{exp} (m)	Asymptote
0	0,00	7,866	0,000	0,000		-0,110
1	0,04	5,233	0,315	0,000	0,001	-0,072
2	0,08	3,481	0,524	0,013	0,014	-0,035
3	0,12	2,316	0,663	0,034	0,033	0,003
4	0,16	1,541	0,756	0,060	0,057	0,040
5	0,20	1,025	0,818	0,090	0,089	0,078
6	0,24	0,682	0,859	0,123	0,120	0,116
7	0,28	0,454	0,886	0,157	0,157	0,153
8	0,32	0,302	0,904	0,193	0,188	0,191
9	0,36	0,201	0,916	0,229	0,226	0,228
10	0,40	0,134	0,924	0,266	0,259	0,266
11	0,44	0,089	0,929	0,303	0,300	0,304
12	0,48	0,059	0,933	0,340	0,335	0,341
13	0,52	0,039	0,935	0,377	0,375	0,379
14	0,56	0,026	0,937	0,414	0,412	0,416
15	0,60	0,017	0,938	0,452	0,455	0,454
16	0,64	0,012	0,939	0,489		0,492



Bille C (force de frottement en kv)

Bille C

ρ_f = 0,86 (g/cm3)

ρ_b = 8,06 (g/cm3)

La vitesse limite est déterminée

v_{Lim} = 1,23 m/s

Δt = 0,04 s

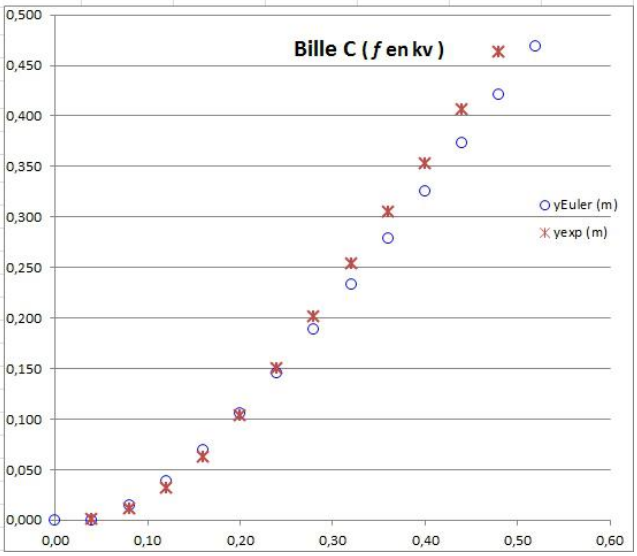
Conditions initiales : $y_0 = 0$; $v_0 = 0$

$$a_n = \left(1 - \frac{\rho_F}{\rho_B}\right)\left(1 - \frac{v_n}{v_{Lim}}\right)g$$

$$v_n = v_{n-1} + a_{n-1}\Delta t$$

$$y_n = y_{n-1} + v_{n-1}\Delta t$$

n	t (s)	a (m/s²)	v (m/s)	y_{Euler} (m)	y_{exp} (m)	Asymptote
0	0,00	8,763	0,000	0,000		-0,110
1	0,04	6,266	0,351	0,000	0,001	-0,072
2	0,08	4,480	0,601	0,014	0,011	-0,035
3	0,12	3,203	0,780	0,038	0,032	0,003
4	0,16	2,290	0,909	0,069	0,062	0,040
5	0,20	1,638	1,000	0,106	0,103	0,078
6	0,24	1,171	1,066	0,146	0,150	0,116
7	0,28	0,837	1,112	0,188	0,201	0,153
8	0,32	0,599	1,146	0,233	0,254	0,191
9	0,36	0,428	1,170	0,279	0,305	0,228
10	0,40	0,306	1,187	0,325	0,353	0,266
11	0,44	0,219	1,199	0,373	0,406	0,304
12	0,48	0,156	1,208	0,421	0,463	0,341
13	0,52	0,112	1,214	0,469		0,379
14	0,56	0,080	1,219	0,518		0,416
15	0,60	0,057	1,222	0,566		0,454



Bille C (force de frottement en kv^2)

Bille C

ρ_f = 0,86 (g/cm3) — Conditions initiales : $y_0 = 0$; $v_0 = 0$

ρ_b = 8,06 (g/cm3)

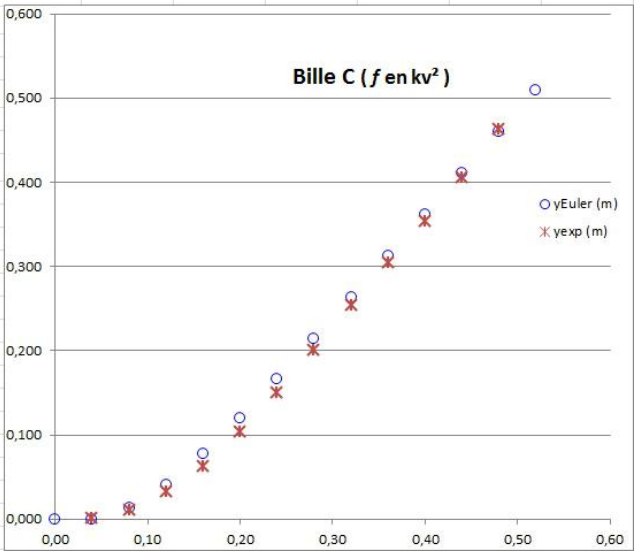
$$\begin{cases} a_n = \left(1 - \frac{\rho_F}{\rho_B}\right)\left(1 - \frac{v_n^2}{v_{Lim}^2}\right)g \\ v_n = v_{n-1} + a_{n-1}\Delta t \\ y_n = y_{n-1} + v_{n-1}\Delta t \end{cases}$$

La vitesse limite est déterminée

v_{Lim} = 1,23 m/s

Δt = 0,04 s

n	t (s)	a (m/s²)	v (m/s)	y_{Euler} (m)	y_{exp} (m)	Asymptote
0	0,00	8,763	0,000	0,000		-0,110
1	0,04	8,052	0,351	0,000	0,001	-0,072
2	0,08	6,143	0,673	0,014	0,011	-0,035
3	0,12	3,879	0,918	0,041	0,032	0,003
4	0,16	2,089	1,073	0,078	0,062	0,040
5	0,20	1,009	1,157	0,121	0,103	0,078
6	0,24	0,459	1,197	0,167	0,150	0,116
7	0,28	0,202	1,216	0,215	0,201	0,153
8	0,32	0,088	1,224	0,263	0,254	0,191
9	0,36	0,038	1,227	0,312	0,305	0,228
10	0,40	0,016	1,229	0,361	0,353	0,266
11	0,44	0,007	1,230	0,411	0,406	0,304
12	0,48	0,003	1,230	0,460	0,463	0,341
13	0,52	0,001	1,230	0,509		0,379
14	0,56	0,001	1,230	0,558		0,416
15	0,60	0,000	1,230	0,607		0,454



Remarque : Pour la bille C, la relation qui lie la force de frottement à la vitesse, varie au cours du temps. D'une force en kv la force de frottement évolue pour devenir une force en kv^2 .
Cependant, la modélisation en Bille C kv^2 apparait, globalement, plus ajustée.

IV – Nous contacter

Ce matériel est garanti 2 ans. Pour toutes questions, veuillez contacter :

sav@sciencethic.com

www.sciencethic.com